

# Diseño y análisis del funcionamiento estructural de un brazo robótico de nivel industrial de cuatro grados de libertad

David Páez Molina\* y Jacqueline Gutiérrez Peña\*\*

## Resumen

Dentro de las industrias existe una gran cantidad de personas que, por realizar trabajos repetitivos, sufren de diferentes enfermedades laborales. Estas actividades afectan el bienestar de las personas, dados los altos riesgos biomecánicos que estos movimientos representan, pues realizarlas de manera continua puede generar daños ya sean temporales o permanentes, lo que puede comprometer tanto la salud de los trabajadores, como la calidad del producto. Por ello, se diseñó un brazo robótico de cuatro grados de libertad, junto con un efector final tipo agarre que permite realizar procesos sin parar, lo que mejora la productividad y procesos de manufactura en las empresas. El diseño de este prototipo es realizado con herramientas de diseño como Solidworks® y simulado con herramientas como Matlab®. De esta manera se realiza y definen los ejes de movimiento y diseño parte por parte, para con ello solucionar diferentes ecuaciones que se encuentran tanto a nivel dinámico como a nivel estático, y así estudiar y analizar su comportamiento e identificar las acciones y actividades desarrolladas por este tipo de brazo robótico. Como consecuencia de esta implementación se espera poder disminuir y evitar estos factores biomecánicos de los trabajadores, para que ellos realicen otro tipo de actividades en las que no se vea afectada su salud física.

## Abstract

Within industries, a large number of people who perform repetitive work suffer from different occupational diseases. Those activities affect workers, due to the high biomechanical risks those activities represent, since performing those movements continuously can cause damage, whether temporary or permanent, which can compromise both the health of the workers and the quality of each product. Therefore, it was implemented a four degrees of freedom robotic arm, together with a grip-type end effector that allows non-stop processes to improve productivity and manufacturing processes in

## Cómo citar este artículo

(APA): Páez, D. y Gutiérrez, J. (2019). Diseño y análisis del funcionamiento estructural de un brazo robótico de nivel industrial de cuatro grados de libertad. *Hashtag*, (15), 11-33

> **Palabras clave:** biomecánicos, brazo robótico, daños, diseño, enfermedades, procesos, productividad, repetitivos

> **Keywords:** Biomechanics, Damage, Design, Disease, Processes, Productivity, Repetitive, Robotic Arm

\* Ing. Mecánica y afines. Contacto: dadpamo@hotmail.com.

\*\* Ing. Mecánica y a fines. Contacto:jakygp@hotmail.es

companies. The design of this prototype is carried out with design tools like Solidworks®, and simulated with tools like Matlab®. Those tools allow to carry out and define their axes of movement, and design part by part in order to solve different equations that are both at a dynamic level and at a static level, in order to study and analyze their behavior and identify the actions and activities developed by this type of robotic arm. This aims to reduce and avoid those biomechanical risk factors of the workers, that releases them to carry out other types of activities where their physical health is not affected.

## Introducción

Actualmente las industrias se concentran cada vez más en automatizar gran parte de los procesos industriales con el fin de disminuir todos aquellos riesgos que potencialmente afectan la integridad del ser humano. Las industrias, gracias a la automatización, reducen los costos que trae contratar mano de obra para dichas tareas, por lo que el uso de brazos robóticos es una práctica que permite suplir diversas actividades de alto riesgo (Millán, 2019).

Los diferentes robots realizan cada vez más trabajos en los que se requiere de mayor precisión y actividad continua, como la realización de trabajos repetitivos. En ese sentido, en esta industria ha crecido la implementación de este tipo de máquinas gracias a los procesos de automatización

y desarrollo tecnológico, con el fin de poder llegar a disminuir costos tanto en la producción, como en capacidad de poder solventar la demanda de los productos en cada industria.

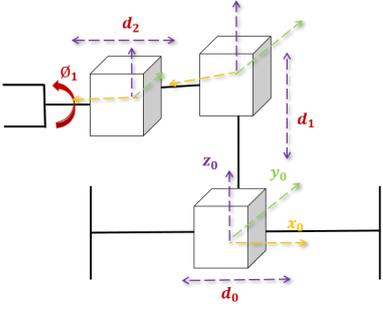
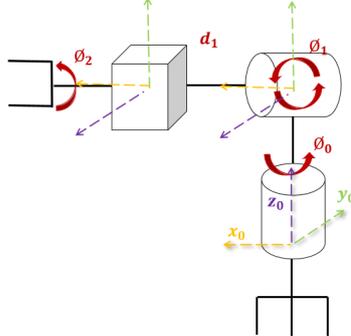
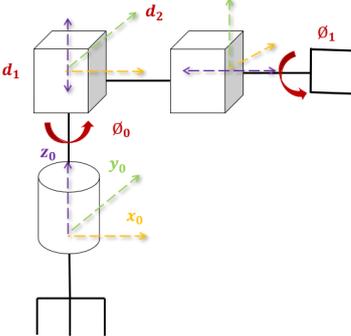
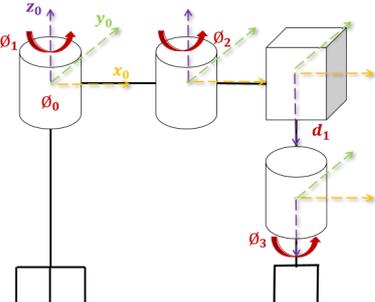
Hoy en día encontramos diversas tareas que pueden ser sustituidas por un brazo robótico programado para ejecutar con perfección y de manera continua las tareas repetitivas que hay dentro de los procesos productivos, con disminución de tiempos muertos y aumento en la eficiencia energética (Ruz Soto, 2019). El empleo de brazos robóticos, gracias a su semejanza a un brazo humano por su estructura y segmentos articulares, logra gran flexibilización y permite transportar elementos dentro de un espacio geométrico (Cardoso, 2017).

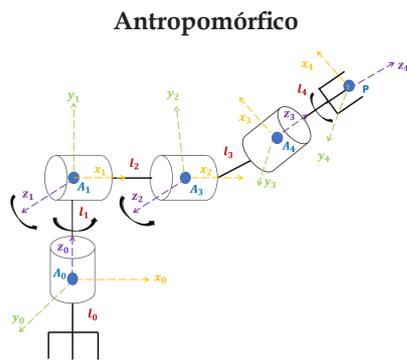
## Antecedentes Históricos

Los brazos robóticos se encuentran implementados en diversos sectores, ya sea centros de investigación, universidades e industrias alrededor del mundo, para el aumento de la producción y la reducción de riesgos laborales. En la tabla 1 se muestran algunas de los más importantes diseños de brazos robóticos desarrolladas a

nivel mundial, junto con sus principales características. Es importante considerar este estudio comparativo para tener un punto de referencia en cuanto al desarrollo de máquinas comerciales con aplicaciones en la industria y el análisis en cada una de ellas (Trejo, 2018).

**Tabla1.** Tabla de antecedentes históricos de los diferentes tipos de brazos robóticos junto con sus características

Tipo de brazo robótico	Características
<p style="text-align: center;"><b>Cartesiano</b></p> 	<p>Este brazo tiene un diseño sencillo y económico, usado para <i>pick and place</i> y CNC.</p> <p>Por lo general cuenta con 3 o 4 movimientos lineales (articulaciones P), lo que le da 3 grados de libertad en los ejes X, Y y Z, y su movimiento es perpendicular entre punto y punto, basado en la interpolación lineal.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Esférico</b></p> 	<p>Se usa en el manejo de máquinas-herramientas, soldaduras por puntos, vaciado de metales y frezado.</p> <p>Está constituido por dos articuladores R que le dan movimiento de 90° y una P para la extensión retracción, lo que le da la notación de coordenadas esféricas en su efector final. También cuenta con 3 grados de libertad en sus ejes X, Y y Z.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Cilíndrico</b></p> 	<p>La configuración cilíndrica tiene 3 articulaciones, de las cuales 1 es R y 2 son P. En la base se ubica la primera, que es una rotacional; mientras que la segunda y tercera articulación son prismáticas. Esto le proporciona 3 grados de libertad sin contar con la rotación del <i>gripper</i>, en sus ejes X, Y y Z. Entre las aplicaciones de robots manipuladores con esta configuración se encuentran aquellas que procesan cavidades horizontales y transporte de objetos.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Scara</b></p> 	<p>Está diseñado para realizar trabajos repetitivos a gran velocidad y precisión, para el posicionamiento en el eje x. Dispone de 3 a 4 grados de libertad, en los que trabaja en el plano X-Y, pero z es rígido. Cuenta con dos articulaciones de R y una P.</p>



Este robot presenta todas sus articulaciones de tipo R, por lo cual presenta de 3 grados de libertad en adelante. Para determinar la posición del *gripper*, se emplean coordenadas angulares.

Este brazo se denomina 'antropomórfico' porque simula los movimientos de un brazo humano: el primer eje se corresponde con el cuerpo, el segundo con el brazo, el tercero con el antebrazo y el resto de con la muñeca-mano.

Fuente: elaboración propia.

Al analizar las diferentes máquinas, se puede apreciar que cuentan con algunas características comunes, entre ellas:

- Los robots industriales presentan una movilidad general de 3 grados de libertad como mínimo para un nivel universitario de enseñanza; pero a nivel industrial requieren más movilidad para las funciones que deban realizar.
- Son implementados en su totalidad en labores que requieran fina precisión en movimientos repetitivos, para garantizar una calidad idónea en procesos peligrosos y que requieren de altas velocidades de funcionamiento y mayor producción.
- El análisis cinemático del robot es proporcional a los grados de libertad que este posea en sus diferentes ejes y a los cálculos de fuerza, torque, velocidades, aceleraciones y posiciones para garantizar su buen funcionamiento.

## Objetivos

El proyecto tuvo como objetivo general analizar el comportamiento de un brazo robótico, tanto en su estado de reposo como en el movimiento repetitivo, mediante conceptos estáticos y dinámicos relacionados con los cuatro grados de libertad del brazo, para el mejoramiento de las diversas falencias en el desarrollo de la actividad industrial. Como objetivos específicos se

propuso diseñar un prototipo de brazo robótico en un programa de diseño en 3D, identificar teóricamente cálculos de conceptos estáticos y dinámicos de un brazo robótico; y analizar los estados de reposo y movimiento a través de modelos matemáticos de programación de un brazo robótico.

## Marco teórico

Dentro del área laboral se encuentran diferentes daños en la salud de los trabajadores, por enfermedades o lesiones que fueron adquiridas dentro

de un entorno laboral a causa de la frecuencia o la duración y exposición a la cual el trabajador estuvo expuesto a estos riesgos (Reyes, 2011).

Se evaluó la clasificación de antropometría de los cuerpos humanos con el fin de identificar los diferentes factores de riesgos laborales involucrados junto con la aplicación de estos análisis para lograr obtener un brazo robótico lo más parecido a los movimientos del cuerpo humano. La clasificación fue la siguiente:

- **Antropometría Estática:** es la encargada del estudio de las medidas del cuerpo humano cuando este se encuentra en reposo, teniendo en cuenta diferentes posiciones. Estas medidas son de gran importancia, pues se usan para hacer el diseño espacial por el cual se va a desplazar el brazo robótico (Bustamante, 2019).
- **Antropometría Dinámica:** es la encargada de analizar y estudiar el cuerpo humano durante diferentes actividades, teniendo en cuenta los diferentes desplazamientos, a saber, horizontal, vertical, lateral y axial, y así considerar los movimientos ergonómicos en el diseño del brazo robótico (Barraza, 2016).

Dentro de los riesgos laborales encontrados basados en la antropometría, existen cuatro factores de riesgos: los mecánicos, que son aquellos que son derivados por el uso de máquinas, herramientas equipos entre otros; los químicos, que afectan a los trabajadores por el uso de sustancias que, al entrar en contacto con el cuerpo, puede ocasionar lesiones en ellos; los físicos, relacionados con las propiedades físicas de los cuerpos; y finalmente los biomecánicos, que involucran los trabajos y actividades repetitivas que realizan los trabajadores en sus sitios de trabajo (García, 2016).

Gracias a los brazos robóticos es posible ampliar la capacidad de los brazos humanos en los procesos industriales. Por esta razón muchas empresas optan cada vez más por automatizar los procesos con brazos robóticos, dadas sus condiciones mecánicas y repetitivas, ya que con su ayuda las empresas tienen un aumento en el rendimiento, al igual que en la producción.

Esto produce optimización y eficiencia dentro de cada proceso industrial, con lo que también reduce los costos, pues se disminuyen errores y mano de obra. Al tener trabajadores que realizan tareas repetitivas y trabajos de esfuerzo, se pueden ocasionar lesiones y/o accidentes laborales, lo que representa una de las principales bajas de los trabajadores. Este factor se evita con la implementación de brazos robóticos.

También se mejora la calidad de los productos, pues los brazos ofrecen precisión y son adaptables a los nuevos procesos industriales por su fácil programación. Además, estos brazos robóticos tienen una gran resistencia, lo que posibilita la opción del trabajo en un mismo proceso durante día y noche, los 365 días del año aun en condiciones extremas de corrosión o temperatura (Barraza, 2016).

En los brazos robóticos se encuentran efectores al final, que pueden ser *grippers* o pinzas, que por lo general tienen forma de garra. Esto le permite realizar funciones como desplazamiento, sujeción y ensamblaje de piezas, tal como se ve dentro del sector automovilístico, al desarrollar actividades como soldar, pintar o atornillar, ya que estos brazos robóticos permiten llevar a cabo estas tareas repetitivas de larga duración sin presentar agotamiento (Trejo, 2018).

## Metodología

En el desarrollo de este proyecto se diseñó una pieza por pieza, que luego es ensamblado a través del uso del software Solidworks®. Este, posteriormente, nos sirve para poder determinar cuáles son las piezas que tendrán movimiento, al darles un grado de libertad para un total de cuatro grados, cada una con sus eslabones. Luego se procede a la toma de

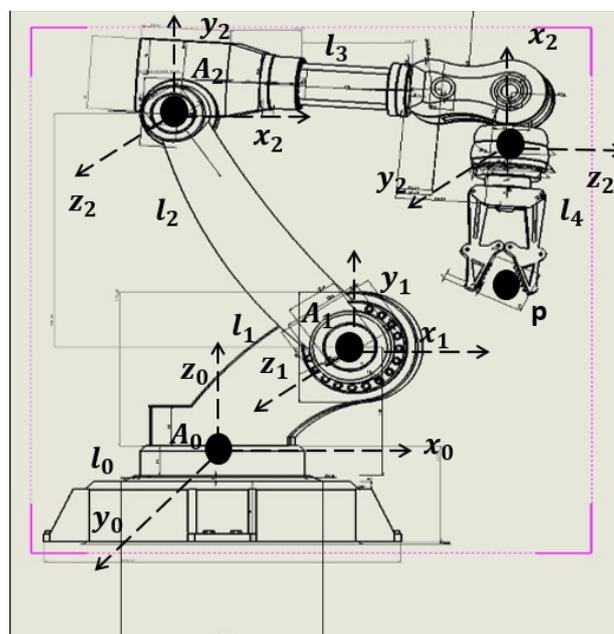
medidas finales de los eslabones y finalmente a la realización de ecuaciones de cinemática para los diferentes cálculos, con ayuda del software Matlab®, para encontrar los valores de posición, orientación, velocidades, aceleraciones, fuerzas, toques y momentos de inercia, tanto en un tiempo  $t_0$  como  $t_1$ .

## Resultados

En primera instancia, se diseñó el prototipo del diseño del brazo robótico de 4 grados de libertad en el software Solidworks®, para luego verificar el comportamiento mecánico de la estructura diseñada e identificar sus partes, y realizar,

posteriormente, un análisis cinemático y cinético. A continuación, en la figura 1, se puede ver el ensamblado final del brazo robot con sus respectivos ejes y medidas:

Figura.1. Visualización de las medidas y ejes del brazo robótico de 4 grados de libertad en Solidworks.



Fuente: elaboración propia

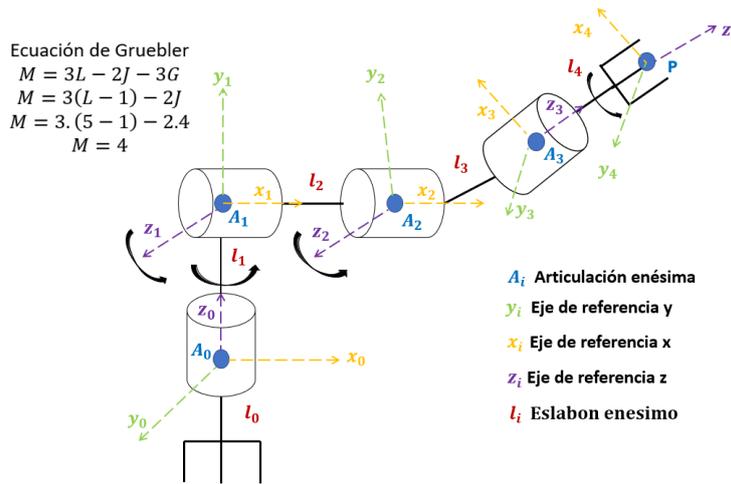
Luego, por medio de la cinemática directa, se estudió el movimiento del extremo y el resto de los eslabones, para el modelamiento del brazo con

respecto a un sistema de referencia, que se muestra en la figura 2. De acuerdo con esto, podemos calcular los grados de libertad con la ecuación de

Gruenbler de forma analítica, de lo que se obtiene como resultado cuatro grados de libertad, por las cuatro articulaciones rotacionales y sus cinco eslabones, contando la base. Este manipulador

se denomina angular o antropomórfico, ya que simula de forma análoga los movimientos de un brazo humano, además de tener tres principales articulaciones rotacionales.

Figura 2. Esquemático de los marcos de referencia del brazo robot antropomórfico.



Fuente: elaboración propia

De acuerdo con el convenio D-H, los marcos de referencia se colocan considerando las siguientes pautas (Cardoso, 2017):

- Identificar los eslabones, articulaciones y ejes del brazo robótico, al colocarlo en posición  $q = [0,0,0]$ , seguido a enumerarlos desde la base 0 y n para los últimos.
- Asociar la trama a un eslabón, al asignar el origen y sentido de los ejes z alineados con el eje de movimiento de la articulación.
- Obtener los parámetros de D-H según el mapeo y por cada par de tramas obtener una matriz de transformación.
- Operar las matrices de cada trama para obtener una matriz resultante, que describa el punto de interés.

- Obtener las ecuaciones de cinemática directa del vector de traslación continua en la matriz homogénea.

A partir de estos marcos de referencia se obtienen los cuatro parámetros del manipulador:

- $a_i$  (largo del eslabon)=Distacia entre  $Z_{i-1}$  y  $Z_i$  en  $X_i$
- $d_i$  (distancia de la articulacion)=Distancia entre  $X_{i-1}$  y  $X_i$  en  $Z_{i-1}$
- $\phi_i$  (Angulo de articulacion)=rotacion entre eje  $X_{i-1}$  sobre  $Z_{i-1}$  para quedar paralelo a  $X_i$ .
- $\alpha_i$  (Angulo de torsion)=rotacion del eje  $Z_{i-1}$  sobre  $X_i$  para quedar paralelo a  $Z_i$ .

En la tabla 2 se muestran los datos generales del brazo robótico. En ella se observan datos constantes que representan las dimensiones de los eslabones ( $a_i$ ) y los ángulos de torsión ( $\alpha_i$ ), entre

las articulaciones 1 y 2, y las articulaciones 3 y 4 respectivamente. Note que también se presentan datos variables con respecto a los ángulos de

rotación de las articulaciones ( $\phi_i$ ) dependiendo de la posición asignada.

**Tabla 2.** Tabla de D-H parámetros sin simplificar

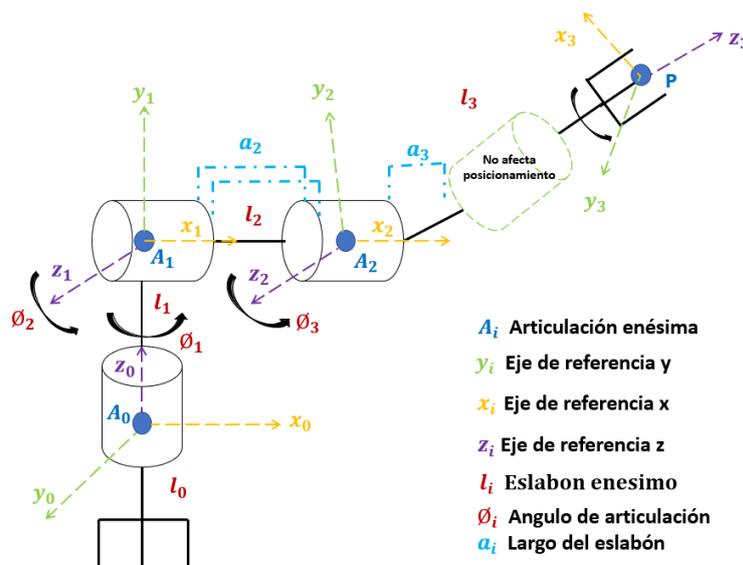
# Eslabón (i)	$a_i$ (cm)	$\alpha_i$	$d_i$ (cm)	$\phi_i$
1	0	$\Pi/2;90$	0	$\phi_1^*$
2	44.378	0	0	$\phi_2^*$
3	0	$\Pi/2;90$	0	$\phi_3^*$
4	0	0	30.755	$\phi_4^*$

Fuente: elaboración propia

Para conocer la posición de P en los diferentes ejes del *gripper*, se puede simplificar el esquema mostrado en la figura 3, ya que es obvio que la articulación 4 no afecta en la posición final del

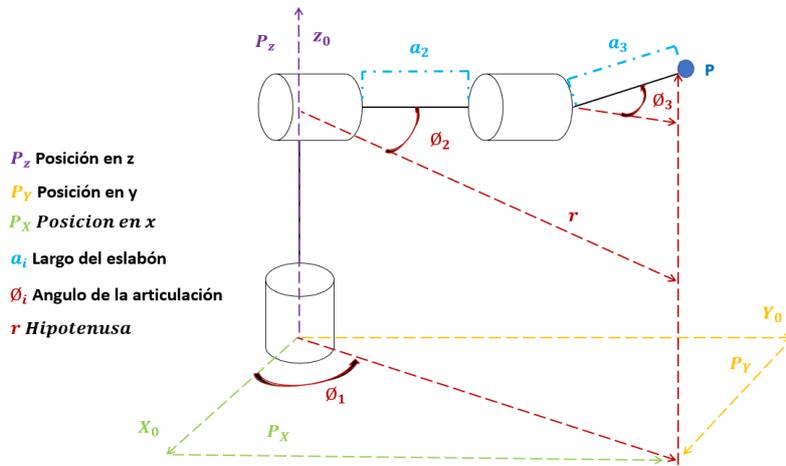
manipulador. La figura 5 muestra la nueva representación y la figura 4 los parámetros asociados a la simplificación el modelo.

**Figura 3.** Esquemático simplificado de los marcos de referencia del brazo robot antropomórfico.



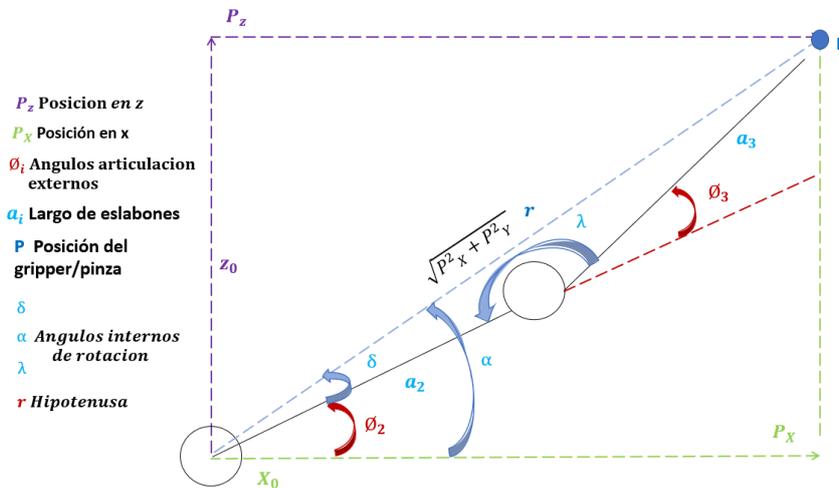
Fuente: elaboración propia

**Figura 4.** Vista frontal esquemática para el análisis de cinemática inversa del robot antropomórfico.



Fuente: elaboración propia

**Figura 5.** Vista periférica esquemática para el análisis de cinemática inversa del robot antropomórfico.



Fuente: elaboración propia

Se ve reflejado en la tabla 3 que se eliminó la articulación 4 del brazo, pues se retiró una fila para el cálculo de las operaciones de cinemática

directa. Por ende, no hay ángulo de torsión entre 2 y 3 y la distancia de articulación  $d_4$  se convierte en el largo de eslabón  $a_3$ .

**Tabla 3.** Tabla de D-H parámetros simplificada

# Eslabón (i)	$a_i$ (cm)	$\alpha_i$	$d_i$ (cm)	$\phi_i$
1	0	$\pi/2;90$	$d_1$	$\phi_1^*$
2	44.378	0	0	$\phi_2^*$
3	49.147	0	0	$\phi_3^*$

Fuente: elaboración propia

Como indica el convenio de D-H, cada fila de la tabla de la figura 5 debe ser sustituida en la matriz identidad homogénea, para la composición de las siguientes 3 matrices, donde la ecuación 1 es la matriz identidad fijada por D-H, la cual va a ser usada para reemplazar los términos de

D-H entre cada eslabón. Estos se ven reflejadas en la ecuación 3 a nivel general, pero se debe de operar haciendo producto punto entre cada una para tener nuestra matriz resultante de la ecuación 5.

$$H_i = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \cos\alpha_i & \sin\phi_i \sin\alpha_i & a_i \cos\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \cos\alpha_i & -\cos\phi_i \sin\alpha_i & a_i \sin\phi_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 1)

$$H_i^{i-1} = H_1^0 \cdot H_2^1 \cdot H_3^2$$

(Ecuación 2)

$$H_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi_1 & 0 & \sin\phi_1 & 0 \\ \sin\phi_1 & 0 & -\cos\phi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi_2 & \sin\phi_2 & 0 & a_2 \cos\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 & a_2 \sin\phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi_3 & \sin\phi_3 & 0 & a_3 \cos\phi_3 \\ \sin\phi_3 & \cos\phi_3 & 0 & a_3 \sin\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 3)

$$H_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi_{1,2} & \cos\phi_1 \sin\phi_2 & \sin\phi_1 & a_2 \cos\phi_{1,2} \\ \sin\phi_1 \cos\phi_2 & \sin\phi_{1,2} & -\cos\phi_1 & a_2 \sin\phi_1 \cos\phi_2 \\ \sin\phi_2 & \cos\phi_2 & 0 & a_2 \sin\phi_2 + d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\phi_3 & \sin\phi_3 & 0 & a_3 \cos\phi_3 \\ \sin\phi_3 & \cos\phi_3 & 0 & a_3 \sin\phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 4)

$$H_i^{i-1} = \begin{bmatrix} Cs\phi_{1,2,3} + Cs\phi_1 Sn\phi_{2,3} & Cs\phi_{1,2} Sn\phi_3 + Cs\phi_{1,3} Sn\phi_2 & Sn\phi_1 & a_3 Cs\phi_{1,2,3} + a_3 Cs\phi_1 Sn\phi_{2,3} + \\ Sn\phi_1 Cs\phi_{2,3} + Sn\phi_{1,2,3} & Sn\phi_{1,3} Cs\phi_2 + Sn\phi_{1,2} Cs\phi_3 & -Cs\phi_1 & a_3 Sn\phi_1 Cs\phi_{2,3} + a_3 Sn\phi_{1,2,3} + a_ \\ Sn\phi_2 Cs\phi_3 + Cs\phi_2 Sn\phi_3 & Sn\phi_{2,3} + Cs\phi_{2,3} & 0 & a_3 Cs\phi_3 Sn\phi_2 + a_3 Sn\phi_3 Cs\phi_2 + a_2 S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 5)

Una vez tenemos nuestra matriz homogénea operada, podemos deducir el  $P_3^0$  manifestado en la ecuación 6, modelo cinemático para la posición en el punto p del gripper del brazo robótico,

con base al escalar; y  $O_3^0$  de la ecuación 7 es la orientación del punto de interés con respecto a la base.

$$P_3^0 = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 Cs\phi_{1,2,3} + a_3 Cs\phi_1 Sn\phi_{2,3} + a_2 Cs\phi_{1,2} \\ a_3 Sn\phi_1 Cs\phi_{2,3} + a_3 Sn\phi_{1,2,3} + a_2 Sn\phi_1 Cs\phi_2 \\ a_3 Cs\phi_3 Sn\phi_2 + a_3 Sn\phi_3 Cs\phi_2 + a_2 Sn\phi_2 + d_1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 6)

$$O_3^0 = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cs\phi_{1,2,3} + Cs\phi_1 Sn\phi_{2,3} & Cs\phi_{1,2} Sn\phi_3 + Cs\phi_{1,3} Sn\phi_2 & Sn\phi_1 \\ Sn\phi_1 Cs\phi_{2,3} + Sn\phi_{1,2,3} & Sn\phi_{1,3} Cs\phi_2 + Sn\phi_{1,2} Cs\phi_3 & -Cos\phi_1 \\ Sn\phi_2 Cs\phi_3 + Cs\phi_2 Sn\phi_3 & Sn\phi_{2,3} + Cs\phi_{2,3} & -Cs\phi_1 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 7)

Teniendo como base el cálculo de la cinemática directa, con la posición y orientación del punto  $P_3^0$ , procedemos a realizar las ecuaciones para determinar las coordenadas articulares del brazo que permiten llegar al extremo. Para llegar al planteamiento de las ecuaciones, se aplica el método geométrico que se describe a continuación.

De acuerdo con la vista frontal proporcionada por la figura 4, se puede obtener el Angulo  $\phi_1$  con base en la ecuación trigonométrica de dos formas, según la ecuación 8. Por ende, se indica que el P se encuentra sobre el eje z de la base, al tener infinitas soluciones para su ángulo de rotación por el movimiento.

$$\phi_1 = Tan^{-1} \left[ \frac{P_y}{P_x} \right] \circ \phi_1 = atan2[y, x]$$

(Ecuación 8)

Para seguir planteando el modelo de ecuaciones es necesario contar con otra perspectiva del brazo, a lo cual en la figura 5 se abordará una vista periférica.

Según el análisis geométrico de la figura 5, se pueden inferir las siguientes relaciones:

$$\phi_2 + \lambda = 180 \quad \lambda = 180 - \phi_2$$

(Ecuación 9)

Como la sumatoria de los dos ángulos  $\lambda$  y  $\phi_2$  y se obtiene la ecuación 9. Seguido a esto para obtener el ángulo, se aplica el de Teorema de

Pitágoras para la obtención de la distancia manifestada en la ecuación 10.

$$P^2 = r^2 + P_Z^2 = P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2$$

(Ecuación 10)

Luego se aplicó la Ley de cosenos e identidad  $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$  para aplicarla a la ecuación 10 y

obtener la 11, que más adelante será usada para despejar a favor de  $\phi_3$  en la ecuación 12.

$$P^2 = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos\lambda = a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos\theta_3$$

(Ecuación 11)

$$D = \cos\theta_3 = \frac{P_X^2 + P_Y^2 + P_Z^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3}$$

(Ecuación 12)

Para simplificar aún más la ecuación 12, se aplican la identidad  $\sin\theta$  obteniendo la ecuación 13,

lo que se puede expresar de la forma  $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ , de lo que resulta la ecuación 14 del ángulo.

$$\sin\theta_3 = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - D^2}$$

(Ecuación 13)

$$\tan\theta_3 = \sqrt{\frac{1-D^2}{D}} = \theta_3 = \text{atan2}\left(\sqrt{1-D^2}, D\right)$$

(Ecuación 14)

El cálculo del Angulo  $\theta_2$  depende directamente de la postura que asuma el Angulo de  $\theta_3$  de la figura anterior, si toma un valor positivo será una

postura inferior y superior si es lo contrario. De lo cual podemos decir lo siguiente:

$$\theta_2 = \operatorname{atan2} \left[ \frac{P_z - d_1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \right] - \operatorname{atan2} \left[ \frac{a_3 \operatorname{Sn} \theta_3}{a_2 + a_3 \operatorname{Cs} \theta_3} \right]$$

(Ecuación 15)

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left[ \frac{P_z - d_1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} \right] - \tan^{-1} \left[ \frac{a_3 \operatorname{Sn} \theta_3}{a_2 + a_3 \operatorname{Cs} \theta_3} \right]$$

(Ecuación 16)

Donde el Angulo  $\theta_2$  se obtiene de los catetos opuestos y adyacentes del triángulo del ángulo 2 y el complementario de  $\delta$ , siendo estos el arco tangente o tangente inverso de estos, expresados por las ecuaciones 15 y 16.

Teniendo conformado el modelo cinemático directo e indirecto, se puede determinar la cinemática diferencial la cual describe velocidades y aceleraciones del manipulador relacionando espacios articulares y cartesianos, expresados con la ecuación 17.

$$f(q_1, q_2 \dots q_n) = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

(Ecuación 17)

$$v^0 = J^0(q) \cdot q'$$

$v$  = velocidad lineal  $w$  = velocidad angular

(Ecuación 18)

El análisis de cinemática diferencial se concreta con la denominada matriz Jacobiana, que se puede evidenciar en el principio general de la ecuación 18, en donde  $q$  es el vector de ángulos de articulación del manipulador y  $v$  es un vector de velocidades cartesianas;  $J^0$  depende del número de articulaciones tenidas en cuenta para el brazo. Cabe mencionar que  $q=0$ , expresión en la cual se toma como referencia el sistema donde el Jacobiano se expresa en un determinado

sistema de referencia. Asimismo, para unos determinados valores de las variables articulares, la relación entre las velocidades articulares y las velocidades en el espacio cartesiano son lineales.

La función que relaciona las velocidades entre cada espacio es el Jacobiano o matriz Jacobiana, que se muestra en la ecuación 19, en la que desglosamos la ecuación 18 en sus derivadas y luego en términos simplificados.

$$J(q) = \begin{bmatrix} J_v(q) \\ J_w(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta\theta_1} \cdot r_3^0 & \frac{\delta}{\delta\theta_2} \cdot r_3^0 & \frac{\delta}{\delta\theta_3} \cdot r_3^0 \\ z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0^0 x(r_3^0 - r_0^0) & z_1^0 x(r_3^0 - r_1^0) & z_2^0 x(r_3^0 - r_2^0) \\ z_0^0 & z_1^0 & z_2^0 \end{bmatrix}$$

(Ecuación 19)

Donde  $z_n^0$  es la posición en z que teníamos de cada matriz homogénea en su articulación;  $r_n^0$  es la posición en los ejes x, y y z, dependiendo de cada punto del eslabones. De esta forma se puede reemplazar sus valores para determinar

el modelo de las velocidades del *gripper*. Por el contrario, si se quiere conocer las velocidades de cada punto articular en vez del *gripper*, se puede invertir o determinar el rango la ecuación al calcular la inversa, según la ecuación 20

$$q' = J^{-1} \circ \text{rank}[J(q)]$$

(Ecuación 20)

Una vez definidos los parámetros de velocidades en cada punto del brazo, se puede pasar a determinar las aceleraciones, que cuales son de vital importancia para el control de fuerza de manipuladores a lo largo de una trayectoria y permiten determinar el estado de aceleración de la herramienta (compuesto por tres aceleraciones lineales y tres aceleraciones angulares) con las aceleraciones angulares de las juntas actuadas.

Para determinar la ecuación de aceleración se requiere conocer los ángulos de posición de las juntas, la posición y la orientación de la herramienta, las velocidades de las juntas y el estado de velocidad de la herramienta (velocidades a lo largo de los ejes X, Y y Z). Esta ecuación se evidencia a continuación:

$$X' = J \cdot q'' + J' \cdot q'$$

(Ecuación 21)

$$X' = [x'' y'' z'' \alpha_x \alpha_y \alpha_z]^T$$

(Ecuación 22)

$$q = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5]$$

(Ecuación 23)

$$J' = \frac{dJ(q)}{dt}$$

(Ecuación 24)

Donde la ecuación 21 es la forma generalizada de la aceleración, que es la doble derivada de la posición o la derivada de la velocidad, conformada por la multiplicación del Jacobiano por la doble derivada de la posición, más la derivada del Jacobiano por la derivada de la posición. Siendo  $x'$  la aceleración de la herramienta, la de los ejes (x, y, z) lineales y la de  $\alpha$  angulares, expresados en la ecuación 22 y en la 23, el vector aceleración de la junta i-esima. El término faltante de  $J'$  no es más que la derivada parcial del Jacobiano de la velocidad con respecto al tiempo, expresada en la ecuación 24. Si se quiere profundizar en cómo obtener las aceleraciones angulares, tangenciales o totales se requieren de la ecuación 25 a la 27.

$$a_t = \alpha \cdot R_n$$

(Ecuación 25)

Aceleración tangencial

$$a_n = w^2 \cdot R_n$$

(Ecuación 26)

Aceleración angular

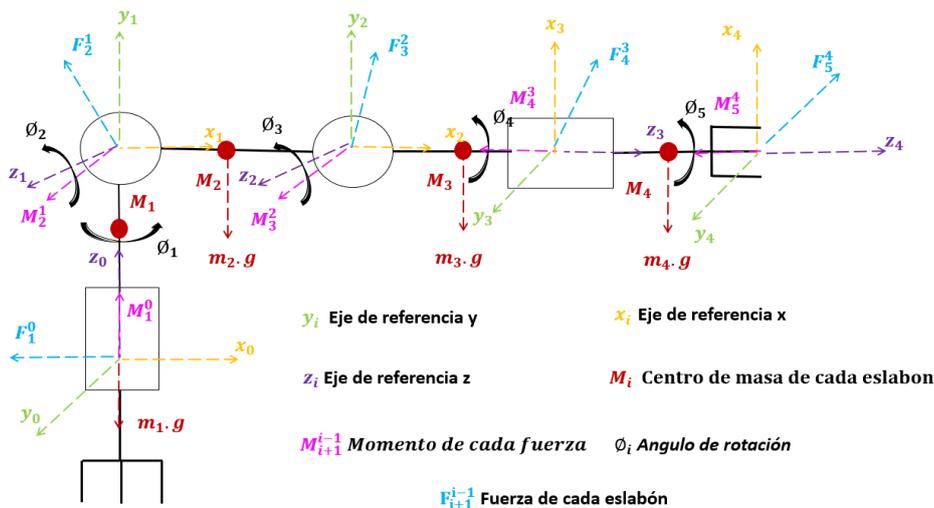
$$a_{i-1} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

(Ecuación 27)

Aceleración total en el punto

Al finalizar el planteamiento de las ecuaciones del brazo robot en un tiempo  $t_1$ , pasamos a un tiempo  $t_0$ , de la figura 6, cuando se encuentra en reposo, ya que no realiza ningún movimiento. Entonces, actúan varias fuerzas para que se mantenga en equilibrio al ser un cuerpo rígido de 4 grados de libertad, en el que solo tres de ellos representan significancia en el movimiento total del brazo robótico, pues el cuarto es un movimiento rotacional que ocasiona que la pinza gire, pero no altera el ángulo de posición final.

Figura 6. Vista esquemática del brazo robótico en estado de reposo

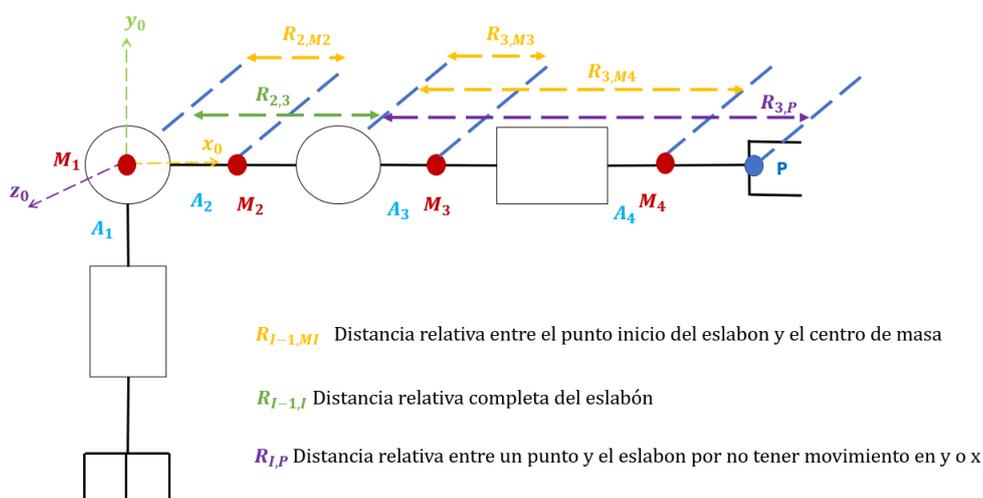


Fuente: elaboración propia

También tenemos cuatro fuerzas que intervienen en todo el sistema. Por lo tanto, la sumatoria de fuerzas da cero, al igual que en la sumatoria de momentos que también debe de ser cero. Estas fuerzas varían de forma independiente sobre cada actuador, generando así un ángulo de rotación por cada articulación y cada centro de masa significa que la masa del eslabón se está multiplicando por la gravedad, de lo que se obtiene el peso específico de cada uno.

También son necesarias las distancias R, representadas en la figura 7. Estas son las distancias relativas que hay desde un punto inicial hasta un punto final, ya sea desde un punto inicial de un centro de masa 1 hasta un centro de masa 2; o de un 2 a un 3 y así sucesivamente. Estas distancias se representan en algunos casos desde el inicio del eslabón hasta la mitad o desde el final hasta la mitad, dependientemente de lo que se está hallando de cada eslabón ya sea el momento de la fuerza.

Figura 7. Vista esquemática de la distancia relativa del robot antropomórfico.



Fuente: elaboración propia

Con base en el esquemático de fuerzas y de distancias relativas, se realizan las ecuaciones de sumatoria de fuerzas y sumatoria de momentos en un cuerpo rígido. Para ello contamos con los R, que son las distancias relativas que hay entre cada punto y articulación, o también puede

ser desde un punto inicial de la articulación a un punto de mitad de centro de masa con el fin de hallar la fuerza o momento entre cada eslabón.

- Equilibrio de fuerzas en el eslabón i

$$\Sigma f_{ext}(i) = 0$$

(Ecuación 28)

$$f_{i-1,i} - f_{i,i+1} + m_i g_i = 0 \rightarrow f_{i-1,i} = f_{i,i+1} - m_i g_i$$

(Ecuación 29)

- Balance de pares sobre el eslabón tomando momentos en el centro de masa

$$\Sigma M_{ext}(i) = 0$$

(Ecuación 30)

$$M_{i-1,i} - M_{i,i+1} + (r_{ci,i-1} * f_{i-1,i}) - (r_{ci,i} * f_{i,i+1}) = 0$$

(Ecuación 31)

$$M_{i-1,i} = M_{i,i+1} + (r_{i-1,ci} * f_{i-1,i}) - (r_{i,ci} * f_{i,i+1})$$

(Ecuación 32)

$$M_{i-1,i} = M_{i,i+1} + [r_{i-1,ci} * (f_{i,i+1} - m_i g)] - (r_{i,ci} * f_{i,i+1})$$

(Ecuación 33)

$$M_{i-1,i} = M_{i,i+1} + (r_{i-1,ci} * f_{i,i+1}) + (r_{i-1,ci} * m_i g) - (r_{i,ci} * f_{i,i+1})$$

(Ecuación 34)

$$M_{i-1,i} = M_{i,i+1} + (r_{i-1,ci} * m_i g) + [(r_{i-1,ci} - r_{i,ci}) * f_{i,i+1}]$$

(Ecuación 35)

$$r_{i-1,ci} + r_{ci,i} = r_{i-1,i}$$

(Ecuación 36)

$$M_{i-1,i} = M_{i,i+1} - (r_{i-1,ci} * m_i g) + (r_{i-1,i} * f_{i,i+1})$$

(Ecuación 37)

En el equilibrio de fuerzas de la ecuación 28 se plantea que la sumatoria de fuerzas externas en cada eslabón debe ser igual a cero para que esté en un estado de reposo. Luego para determinar la fuerza individual de cada eslabón del brazo se

toma la ecuación 29, en la que se despeja a favor de la fuerza anterior que es igual a la siguiente, menos el peso de este eslabón. De igual forma, cada vez que se tiene una fuerza sobre una articulación, se tiene un movimiento que va a tener

un momento o torque por cada uno, siendo la sumatoria de momentos externos en el cuerpo rígido igual a cero, como en la ecuación 30.

Para llegar a la ecuación 37, en la que conocemos el momento individual sobre cada eslabón, es necesario partir de la ecuación 31, en donde se plantea que el momento del eslabón anterior, menos el del siguiente, más o menos las distancias relativas entre cada punto de inicio fin a su centro de masa, multiplicado por la fuerza respectiva. Por ende, se despeja a favor

del momento anterior según la ecuación 32, seguido a la 33 cambiar el origen de las distancias relativas por su punto de base y luego en la 34 se sustituye la 32. En la ecuación 35 se aplica la propiedad distributiva, ya para que en la 37 solo sea simplificar en base a la ecuación 36, con el fin de obtener la ecuación de equilibrio en  $\theta_i$

Dentro del modelo dinámico se observan diferentes ecuaciones tales como las ecuaciones 38 y 39, las cuales representan a Euler-Lagrange como se muestran a continuación.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = r$$

(Ecuación 38)

$$L = K - P$$

(Ecuación 39)

Los valores compuestos por estas ecuaciones son:

- $q_1$ : coordenadas generalizadas
- $r$ : vector de fuerzas o pares en los eslabones

- $K$  y  $P$ : estas son la energía cinética y la potencial del manipulador del brazo robótico

En la ecuación 40 se observa los componentes traslacionales lineales  $K_l$  junto con su componente rotacional que es  $K_r$ , para la energía cinética.

$$K = K_l + K_r$$

(Ecuación 40)

En la ecuación 41 la ecuación esta descrita desde un punto de vista vectorial es:

$$K_l = \frac{1}{2} m [v_x \quad v_y \quad v_z] \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} m v^t v$$

(Ecuación 41)

Pero en la ecuación 42 se observa cómo se obtiene  $K_r$ :

$$K_r = \frac{1}{2} [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z] I \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \omega^t I \omega$$

(Ecuación 42)

En la siguiente ecuación se obtiene tanto la ecuación de velocidad lineal como la de velocidad

angular del centro de masa del tercer eslabón en su forma vectorial.

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v1} & J_{v2} & J_{v3} & 0 \\ J_{\omega1} & J_{\omega2} & J_{\omega3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^1 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{v13} \\ J_{\omega13} \end{bmatrix} \dot{q}$$

(Ecuación 43)

Con ayuda de la ecuación 44 se permite calcular la energía del eslabón total.

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^T v_3 + \frac{1}{2} \omega_3^T R_3^0 I_3 (R_3^0)^T \omega_3$$

(Ecuación 44)

Se expresa el tensor de inercia con ayuda de la ecuación 45 con base a su marco de referencia ya que permite sustituir ciertas variables en la

ecuación anterior en base de las coordenadas generales.

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 (J_{v13} \dot{q})^T (J_{v13} \dot{q}) + \frac{1}{2} (J_{\omega13} \dot{q})^T R_3^0 I_3 (R_3^0)^T (J_{\omega13} \dot{q})$$

(Ecuación 45)

En la ecuación 46 la energía potencial del tercer eslabón se expresa de forma vectorial en:

$$P_3 = -m_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{c3x} \\ p_{c3y} \\ p_{c3y} \end{bmatrix} = -m_3 g^t P_{c3}$$

(Ecuación 46)

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_i (J_{v1i} \dot{q})^T (J_{v1i} \dot{q}) + (J_{\omega 1i} \dot{q})^T R_i^0 I_i (R_i^0)^T (J_{\omega 1i} \dot{q})$$

(Ecuación 47)

$$P = \sum_{i=1}^4 -m_i g^T p_{ci} \quad (49)$$

(Ecuación 48)

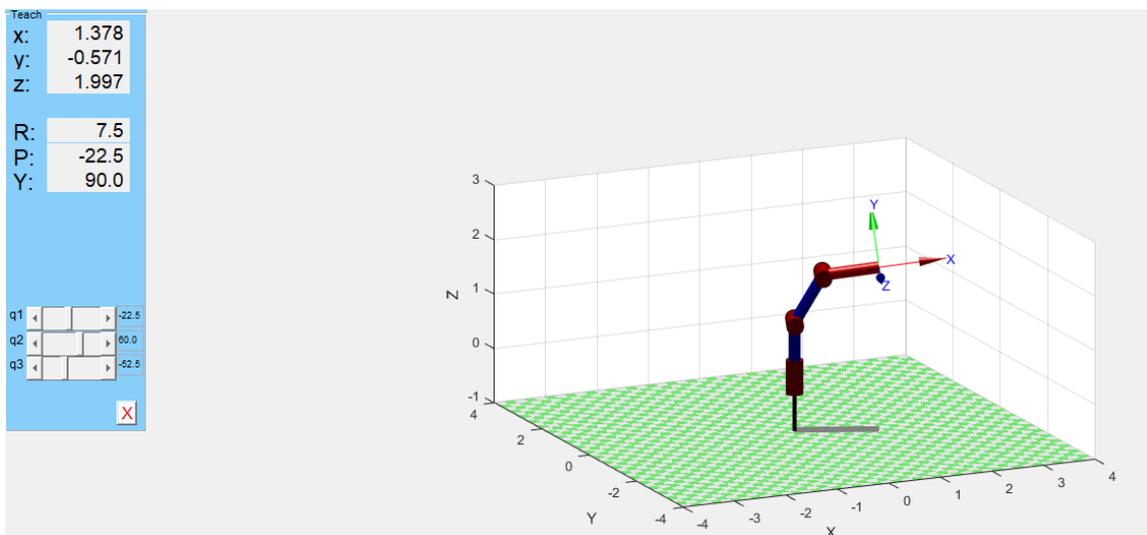
$$K = \frac{1}{2} \dot{q}^t \left[ \sum_{i=1}^4 m_i J_{v1i}^T J_{v1i} + J_{\omega 1i}^T R_i^0 I_i (R_i^0)^T J_{\omega 1i} \right] \dot{q} = \frac{1}{2} q^t D(\dot{q}) \dot{q} \quad (50)$$

(Ecuación 49)

Para finalizar, se comprobaron las ecuaciones dinámicas y estáticas en el software Matlab® (Mathworks, s.f.), en el que se puede apreciar el brazo robótico con su posición, velocidad,

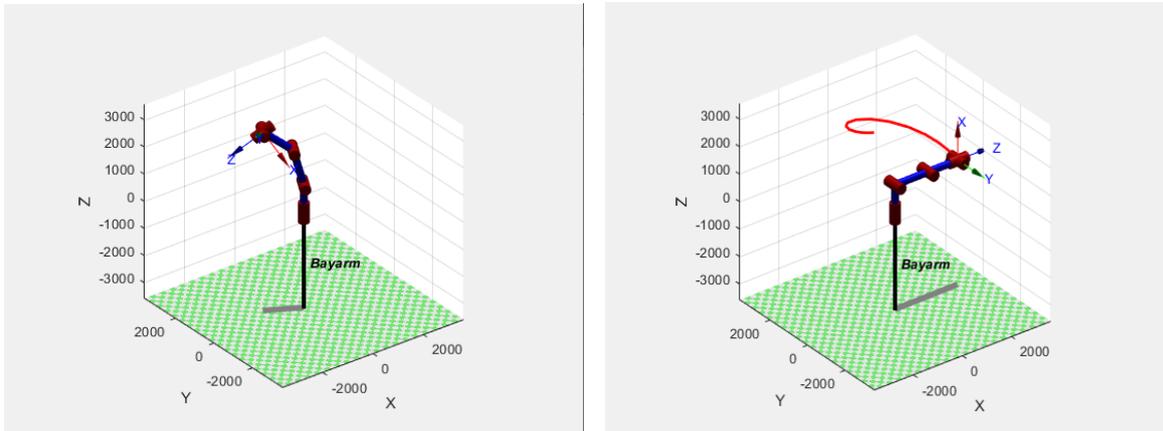
aceleración, fuerza y momentos de una trayectoria en los tiempos t0 y t1, como se muestra en las siguientes figuras:

**Figura 8.** Cinemática directa e inversa robot antropomórfico con la librería petercorke Matlab



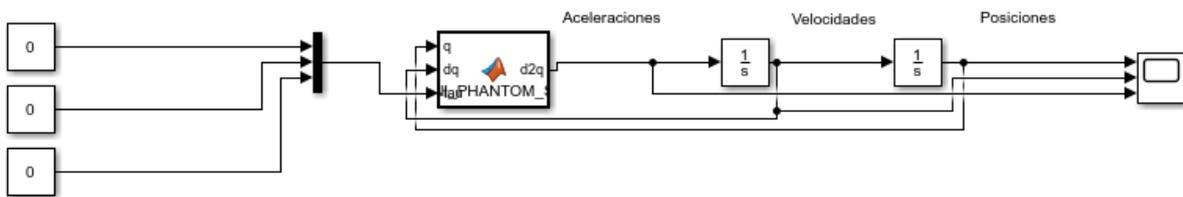
Fuente: elaboración propia

Figura 9. Vista de la trayectoria del robot antropomórfico con la librería petercorke



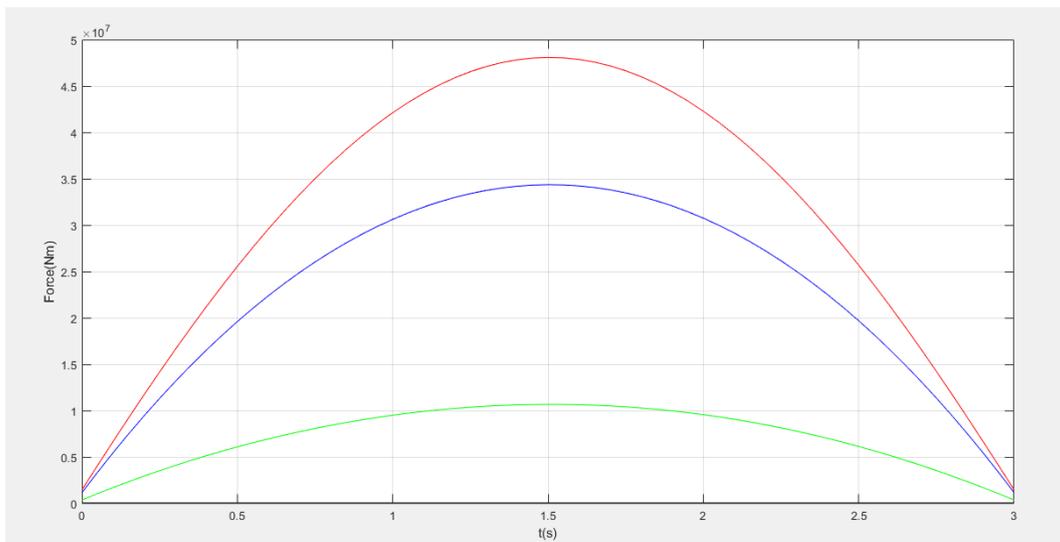
Fuente: elaboración propia

Figura 10. Vista del esquemático del robot en Simulink.



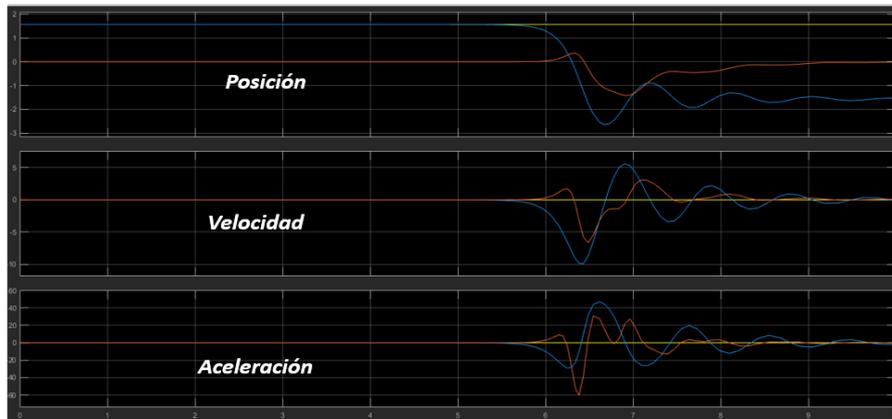
Fuente: elaboración propia

Figura 11. Gráfica de fuerzas en sus articulaciones/motores durante su trayecto.



Fuente: elaboración propia

**Figura 12.** Gráfica de posiciones, velocidades y aceleraciones.



Fuente: elaboración propia

## Conclusiones

Los brazos robóticos son de gran importancia dentro de los procesos industriales, pues reduce la cantidad de empleados en tareas repetitivas, lo que disminuye los riesgos de daños en su salud. Además, la implementación de esta tecnología favorece factores tales como la producción y costos dentro del sistema productivo por mano de obra.

Las ecuaciones dinámicas y estáticas planteadas durante el análisis del brazo antropomórfico se pudieron comprobar mediante Matlab, con lo que se mostró su funcionalidad para el control de variables y análisis del comportamiento físico.

Se realizó el diseño de un robot de 4 grados de libertad en dos estados (estático/dinámico), de

los cuales se obtuvo la cinemática directa e inversa para el cálculo de sus posiciones y velocidades posterior a sus velocidades angulares, junto con las aceleraciones por medio de la matriz Jacobiana.

Se analizó también el modelo estático por sumatoria de fuerzas y el dinámico por el método de Euler LaGrange a partir de su estado de reposo, el cual fue comprobado como los demás planteamientos por medio de simulación en Matlab. El resultado de este trabajo puede ser aplicado a cualquier manipulador robótico de forma general, independientemente de los grados de libertad y posteriores especificaciones.

## Referencias

- Barraza, A. (2016). Modelado dinámico del manipulador serial Mitsubishi Movemaster RV-M1. *UIS Ingenierías*, Vol. 15, No. 2. ISSN: 1657-4583
- Bustamante, N. S. (septiembre de 2019). Análisis cinemático e instrumentación virtual 3D, *Revista chilena de ingeniería*, 27(4).
- Cardoso, E. (2017). Modelos cinemático y dinámico de un robot de cuatro grados de libertad. *Ingeniería Electrónica, Automática y Comunicaciones*, 38(3).
- García, A. (2016). *Diseño, construcción y control de un robot manipulador de 3 grados de libertad de bajo coste para el desarrollo de un manipulador móvil* (tesis de grado). Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España.
- Mathworks (s.f.). Control PR2 Arm Movements Using ROS Actions and Inverse Kinematics. Recuperado de la.mathworks.com: <https://la.mathworks.com/help/robotics/ug/control-pr2-arm-movements-using-actions-and-ik.html>
- Millán, J. (agosto 2019). Sistema de movimientos programados para un brazo robótico miniatura de 6 grados de libertad (trabajo de grado). Universidad Autónoma de Occidente, Cali, Colombia.
- Reyes, F. (2013). *Robotica. Control de Robots Manipulador*. AlfaOmega.
- Ruz Soto, D. (2019). Manipulación remota de brazo robótico a través de microcontrolador (tesis de grado). Universidad técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.
- Trejo, J. (2018). *Diseño y construcción de un prototipo de robot con tres grados de libertad para posicionamiento de objetos*. Santa Tecla, La libertad: Itca,